1 Pendul

1.1 Hvad er et pendul?

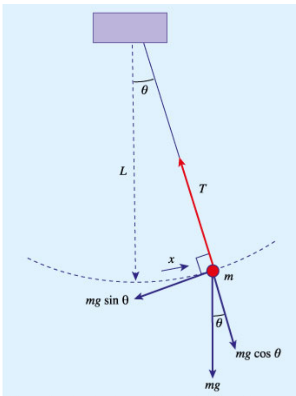
En matematiker og en ingeniør ser tit ens på mange ting, men ofte er der forskelle mellem de to verdner, dette gælder blandt andet for pendulet.

"Det simple pendul", er en matematisk forsimplet måde at regne på det virkelige/fysiske pendul. I det simple pendul er al massen samlet i ét uendeligt lille punkt, hvilket naturligvis ikke er tilfældet for virkelighedens pendul. I forsøg 1 skal det undersøges hvordan svingningstiden T varierer for den simple beregningsmodel, i forhold til det fysiske pendul.

For at kunne bestemme den teoretiske svingningstid for et frit pendul gælder følgende formel for svingningstiden:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1.1}$$

hvor ω er vinkelhastigheden.



Figur 1.1: Påvirkninger på et simpelt pendul

1.2 Vinkelhastigheden for et simpelt pendul

Figur 1.1 viser et frit-legeme-diagram af det simple pendul, dvs. at den situation man ønsker at beskrive indtegnes med de kendte kræfter.

Det kan ses, at de kræfter som påvirker det ophængte pendul, er snorkraften (på engelsk Tension) T, og tyngdekraften $F = mg$. Vær opmærksom på, at y-aksen er parallel med snorkraften.

Svingningstiden kan så bestemmes ved at bruge Newtons 2. lov for bevægelse:

$$\sum F_x = ma \tag{1.2}$$

her betyder $\sum F_x$ summen af alle påvirkende kræfter i x-aksens retning, og vinkelaccelerationen er

$$a = L\,\theta''. \tag{1.3}$$

Læg mærke til, at der ikke sker nogen acceleration i y-retningen og at der her heller ingen kraftpåvirkning er.

Tyngdekraften skrives som:

$$F = mg \tag{1.4}$$

med g værende tyngdeaccelerationen.

Ved at kombinere ligning (1.3), (1.4) og figur 1.1 på forrige side fås følgende:

$$\begin{aligned}
ma &= \sum F_x = -mg\sin\theta \\
&\Updownarrow \\
m\,L\theta'' &= -mg\,\sin(\theta) \\
&\Downarrow \text{ for små udsving gælder at } \sin(\theta) \simeq \theta \\
m\,L\theta'' &= -mg\theta \\
L\theta'' &= -g\theta \\
&\Updownarrow \\
\theta'' &= -\frac{g\theta}{L} \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

Ligning (1.5) er en 2. ordens differentialligning med løsningen:

$$\omega^2 = -\frac{g}{L} \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{1.6}$$

her indsat som led i svingningstiden som vi beskrev i ligning (1.1) på forrige side til

$$\begin{aligned}
T &= 2\pi\frac{1}{\sqrt{\frac{g}{L}}} \\
&= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

1.3 Det fysiske pendul

For at kunne regne på opførslen for et fysisk pendul, skal konceptet "masseinertimoment", skrevet som I, indføres. Summen af momenter M udtrykt ved vinkelaccelerationen α bliver nu:

$$\sum M = I\alpha \tag{1.8}$$

Et masseinertimoment for et pendul skal findes omkring omdrejningsaksen (der hvor pendulet er fastgjort) og afhænger af følgende parametre:

L: Længden fra omdrejningspunkt til pendul

m: massen af pendulet

og pendulets facon/dimension, fx firkantet, cylinder eller lign..

Masseinertimomentet kan være svært at bestemme, og derfor kan der med fordel slås op i tabeller for at finde de rigtige formler for forskellige former*. Hvis pendulet er en cylinder gør følgende formel sig gældende:

$$I = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2 + mL^2 \tag{1.9}$$

hvor m er cyinderloddets masse, h er cylinderens højde og L er stadig afstanden fra omdrejningspunktet til monteringspunktet på toppen af pendulet.

Bemærk snoren er i denne beregningsmodel ikke medtaget, dette kan gøres fordi der anvendes en, i forhold til loddets masse, let sytråd i forsøget. En kraftigere snor vil give en mere kompliceret formel.

1.4 Svingningstiden for det fysiske pendul

Som for det simple pendul opstilles bevægelsesligningen for pendulet, vinkelaccelerationen kaldes stadig for θ''.

Med ligning (1.8) på forrige side kan vinkelhastigheden ω bestemmes.

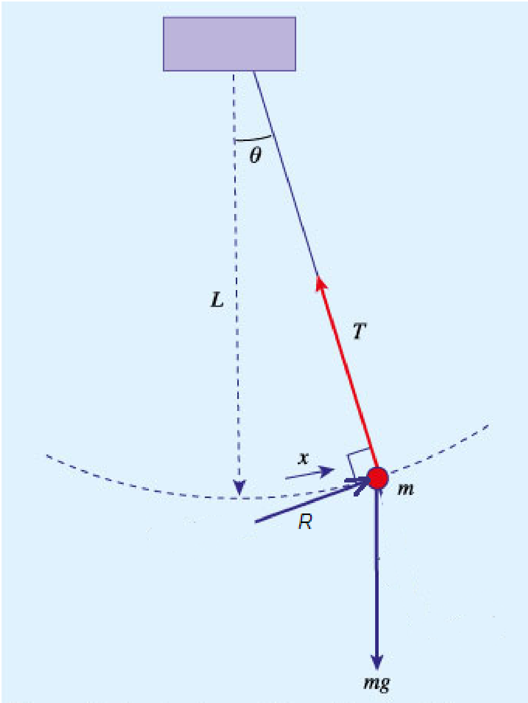
$$\begin{aligned}
I\theta'' &= -mgL\sin(\theta) \\
&\Downarrow \text{ for små udsving af } \theta \text{ gælder} \sin(0) \simeq \theta \\
I\theta'' &= -mgL\theta \\
&\Updownarrow \\
0 &= \frac{mgL}{I}\theta + \theta'' \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

hvilket kan reduceres ned til

$$\omega^2 = \frac{mgL}{I}\theta + \theta'' \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{mLg}{I}} \tag{1.11}$$

Når ω er kendt, betyder det, at vi igen kan bruge formel ligning (1.1) på side 1 til at regne svingningstiden ud som.

$$T = 2\pi\frac{1}{\sqrt{\frac{mgL}{I}})} \quad \Leftrightarrow \quad T = w\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \tag{1.12}$$



Figur 1.2: Vindmodstanden R på pendulet

1.5 Vindmodstanden på et simpelt pendul

På figur 1.2 er vindmodstanden tegnet som påvirkning på det matematiske pendul.

Vindmodstandens kraftpåvirkning virker altid modsatrettet af tyngdekraften. For at regne vindmodstanden på det simple pendul, antages at vindmodstanden stiger proportionalt med hastigheden. At vi kan gøre som netop beskrevet betyder at vi kan udtrykke kraften R som:

$$R = kL\frac{d\theta}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad R = kL\theta' \tag{1.13}$$

hvor k er en konstant.

Lige som for det simple pendul tidligere opstilles bevægelsesligningen for systemet:

---

*Se fx Dynamics af J.L. Meriam og L.G. Kraige

$$
\begin{aligned}
\sum F_x &= ma \\
R - mg\sin\theta &= mL\theta'' \\
&\Updownarrow \\
kl\theta' - mg\sin\theta &= mL\theta'' \\
&\Updownarrow \\
\theta'' mL + kL\theta' - mg\theta &= 0 \\
&\Updownarrow \\
\theta'' + \theta' \frac{k}{m} - \theta \frac{g}{L} &= 0 \qquad (1.14)
\end{aligned}
$$

Ligning (1.14) har den fulde løsning

$$
y(t) = A_0 \exp^{-ct} \sin(\omega t + \phi) \qquad (1.15)
$$

hvori

A_0: er amplituden for den første svingning hvor pendulet slippes

c: er en konstantϕ: er faseforskydningsvinklen

Det ses altså at amplituden for pendulsvingningerne aftager eksponentielt under påvirkning af modstanden fra luften.

2 Forsøgsvejledning 1

2.1 Formål

Formålet med dette forsøg er først at bestemme svingningstiden for et pendul og herefter sammenligne svingningstider for et simpelt og et fysisk pendul.

2.2 Apparatur

for at kunne udføre forsøget, skal følgende materialer anvendes:

- Pendul
- Lod i metal
- Videokamera + stativ
- Excel el. lign.
- Videoafspiller med tidsvisning til 0.01 sek. nøjagtighed.

Medbring selv en computer med programmer til databehandling, det giver mulighed for at få videoerne med hjem, og mulighed for at gense data om nødvendigt. Følgende program er gratis og opfylder kravet om tidsvisning http://www.avs4you.com/da/AVS, men der er helt sikkert andre alternativer, der er lige så gode.

2.3 Fremgangsmåde

- Indstil pendul og kamera så pendul er i fokus og afstanden mellem pendul og kamera er acceptabel.
- Indstil lod til den ønskede starthøjde
- Start kameraet
- Sving pendul
- Optag mindst 5 komplette svingninger
- Analyser data
- Gentag for forskellige højder.

2.4 Databehandling

Via videooptagelserne bestemmes svingningstiden til de forskellige længder. Først sammenlignes den målte svingningstid med den teoretiske. For et simpelt pendul er denne givet ved

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{2.1}$$

Da forsøget ikke er lavet med et simpelt pendul, ses også på forskellen mellem svingningstiderne for et simpelt pendul og et fysisk pendul. Herudfra vurderes det, om den simple beregningsmetoder er acceptabel at anvende beregningsmodellen for et matematisk pendul.

Svingningstiden for et fysisk pendul er givet ved

$$T = 2 * \Pi \sqrt{\frac{I}{mgL}}$$

Start altså med at bestemme masseinertimomentet for loddet. Husk at masseinertimomentet også er afhængigt af snorlængden og derfor også skal ændres for hver måling.

Der bør udføres minimum 5 forsøg.

3 Forsøgsvejledning 2

3.1 Formål

Formålet med dette forsøg er at bekræfte, at amplituden for pendulets svingninger aftager eksponentielt, når det påvirkes af vindmodstand.

3.2 Apperatur

For at udføre forsøges skal følgende anvendes:

- Pendul
- Lod i kork
- Videokamera + stativ
- Excel
- eller ligende
- Et videoafspilnings program det kan vise tiden ned til to decimaler
- Baggrund til pendul med 1x1cm firkanter

3.3 Fremgangsmåde

1. Sæt baggrunden op bag pendulet og sørg for, at snoren er ud for en af de lodrette streger på baggrunden
2. Opstil kamera og stativ
3. Start kamera
4. Sving pendul - hold det stille i udgangsposistionen, da denne placering skal benyttes senere
5. Analyser data

3.4 Databehandling

Ved hjælp af videooptagelsen og baggrunden kan pendulets placering ved hver svingning bestemmes. Først aflæses højden på begyndelsessvingningen denne har tiden: $t = 0$.

For de næste 5 svingninger(som minimum) aflæs da tid og amplitude.

husk det er tiden relativt til $t = 0$ ved begyndelsessvingningen og ikke t fra videoafspilleren.

Herefter plottes data og det skulle gerne ses, at amplituderne aftager eksponentielt.